Lección 6

Funciones de Transferencia y estabilidad.

Funciones de transferencia de las ecuaciones cinéticas

* Las ecuaciones cinéticas son no-lineales, por lo que es necesario linealizarlas antes de aplicarles el algoritmo (ó notación) de las funciones de transferencia

* La ecuación más sencilla es la del modelo de la vida media eficaz:

$$\frac{dN}{dt} = \frac{\lambda \rho(t)}{\beta} N \quad ; \quad \text{si} \quad \frac{dN_0}{dt} = \frac{\lambda \rho_0(t)}{\beta} N_0(t) \quad \text{y usamos}$$

$$\begin{cases} N(t) = N_0(t) + n(t) \\ \rho(t) = \rho_0(t) + \Delta\rho(t) \end{cases}$$

la linealización conduce a:

$$\frac{dn}{dt} - \frac{\lambda \rho_0}{\beta} n = \lambda \frac{N_0(t)}{\beta} \Delta\rho(t) \quad ; n(0)=0$$

Si consideramos que $n(t)$ es una perturbación alrededor de $N_0 \simeq N_0(t)$, se puede tomar la transformada de Laplace

$$\tilde{n} s - \frac{\lambda \rho_0}{\beta} \tilde{n} = \frac{\lambda N_0}{\beta} \widetilde{\Delta\rho} \quad , \text{ de donde } \quad \frac{\tilde{n}}{\widetilde{\Delta\rho}} = G_0(s) = \frac{\lambda N_0/\beta}{s - \frac{\lambda \rho_0}{\beta}}$$

que es la función de transferencia para este caso, y que representaremos como:

$$\widetilde{\Delta\rho} \longrightarrow \boxed{G_0} \longrightarrow \tilde{n}$$

En teoría de control el objetivo no es resolver la ecuación

Lección 6

diferencial, sino identificar los tiempos característicos para poder actuar (controlar) y predecir si el sistema dinámico es estable.

El denominador de la función de transferencia suministra estos tiempos característicos. En este caso, se anula para:

$$s_0 = \lambda \rho_0 / \beta$$

se dice que el sistema tiene un polo positivo. En este caso el polo es real, pero con frecuencia el denominador de la función de transferencia tiene raíces complejas. Siempre que los polos se encuentren en el lado izquierdo del plano complejo, el sistema dinámico es estable. Notar que en nuestro caso el polo se encuentra en el eje real positivo, por lo que el sistema es inestable (la salida $n(t)$ tiende a crecer continuamente)

En el caso de la aproximación Prompt-Jump, la función de transferencia es:

$$G(s) = \frac{N_0}{\beta - \rho_0} \frac{\lambda + s}{s - \frac{\lambda \rho_0}{\beta - \rho_0}}$$

El polo es $s_0 = \lambda \rho_0 / (\beta - \rho_0)$, (la inversa del periodo del reactor), pero también hay un 'cero', o valor de s que anula el numerador

$$z_0 = -\lambda$$

Lección 6

El caso más frecuente en dinámica de reactores consiste en partir del estado crítico y considerar 6 grupos de neutrones retardados:

$$G(s) = \frac{N_0}{\Lambda} \frac{1}{s\left[1+\sum_{i=1}^{6} \frac{\beta_i/\Lambda}{s+\lambda_i}\right]}$$

Esta función de transferencia tiene 6 ceros y 7 polos.

¿ Porqué se usa la transformada de Laplace?

Es muy frecuente que un sistema dinámico requiera magnitudes que no son medibles. La concentración de núcleos precursores de neutrones retardados es un caso típico. Estas magnitudes han de ser eliminadas para concentrar el control sobre magnitudes medibles.

En un sistema de ecuaciones diferenciales la eliminación de variables requiere mucha álgebra. Con la transformada de Laplace, las ecuaciones (lineales) diferenciales se convierten en sistemas de ecuaciones algebráicas de fácil manipulación.

Por ejemplo, sean $\mathcal{D}_n()$ y $\mathcal{D}_m()$ operadores diferenciales lineales de orden n y m respectivamente. Sean $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ funciones temporales. Supongamos que $y(t)$ no es observable, y que se tiene:

$$\mathcal{D}_n(y) = x$$

$$\mathcal{D}_m(z) = y$$

Lección 6

Con la notación de las funciones de transferencia:

$$\tilde{x} \rightarrow \boxed{G_n} \xrightarrow{\tilde{y}} \boxed{G_m} \rightarrow \tilde{z}$$

de donde $\tilde{y} = G_n \tilde{x}$, $\tilde{z} = G_m \tilde{y}$, luego

$$\tilde{z} = (G_m G_n)\, \tilde{x}$$

$$\tilde{x} \rightarrow \boxed{G_n G_m} \rightarrow \tilde{z}$$

La eliminación de la variable $y(t)$ es inmediata.

Algebra de Bloques

Supondremos que todas las variables estan expresadas en el "dominio-s" (Trans. de Laplace). En Control de Reactores, la variable de entrada suele ser la reactividad y la de salida la potencia.

El caso más sencillo es:

$$x \rightarrow \boxed{G_0} \rightarrow y \quad \Rightarrow \quad y = G_0\, x$$

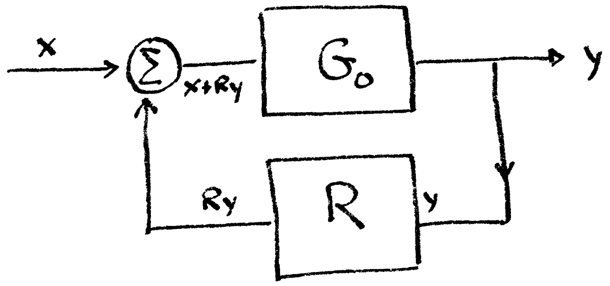
Cuando los bloques están en serie;

$$x \rightarrow \boxed{G_1} \rightarrow \boxed{G_2} \rightarrow \boxed{G_3} \rightarrow \boxed{G_4} \rightarrow \boxed{G_5} - y$$

$$y = (G_1 G_2 G_3 G_4 G_5)\, x$$

Lección 6

En caso de realimentación:



La entrada está reforzada por parte de la salida, para ello se usa un sumador Σ

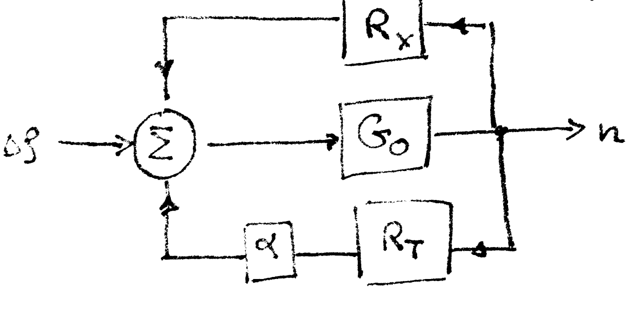
Al bloque de realimentación entra y y sale Ry. Al bloque principal entran x + Ry y sale y. De manera que

$$y = G_0(x + Ry)$$

luego $\quad y - G_0Ry = G_0x \implies y = \left(\dfrac{G_0}{1 - G_0R}\right) x$

$$x \to \boxed{\dfrac{G_0}{1 - G_0R}} \to y$$

Un caso algo más complejo:



$$G_0(\Delta g + \alpha R_T n + R_x n) = \cancel{G_0}\, n$$

$$n = \left(\frac{G_0}{1 - (\alpha R_T + R_x)}\right) \Delta g$$

Lección 6

CRITERIO DE ROUTH (Estabilidad)

Las funciones de transferencia de casos realimentados suelen ser funciones racionales (cociente de polinomios) con un denominador de orden elevado. Para calcular los polos hay que encontrar las raíces del polinomio, lo que no suele ser fácil. Si alguna raíz no queda en la izquierda del plano complejo, el sistema es inestable.

El criterio de Routh sirve para saber si el sistema es inestable sin hayar los polos

Sea $D(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + a_{n-2} s^{n-2} + \dots + a_1 s + a_0$

Se forma la matriz:

$$
\begin{array}{ccccc}
\text{Col. R} & & & & \\
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
b_1 & b_2 & b_3 & b_4 & \\
c_1 & c_2 & c_3 & & \\
d_1 & d_2 & & & \\
e_1 & & & &
\end{array}
$$

La primera columna se llama Columna de Routh. Hay que calcular $b_i, c_i, d_i, e_i, \dots$, como sigue:

Lección 6

Se denomina 'Referente' de un elemento al cociente de los dos elementos de la columna de Routh que le preceden. Por ejemplo: Referente de $c_3 = \frac{a_{n-1}}{b_1}$; Referente de $b_4 = \frac{a_n}{a_{n-1}}$

Se denomina 'Salto' al salto de un caballo de ajedrez hacia arriba. Ejemplo: salto de $b_2 = a_{n-4}$; salto de $d_1 = b_2$

Se denomina 'Sombra' al elemento situado debajo del 'Salto'. Ejemplo: Sombra de $b_2 = a_{n-5}$; Sombra de $d_1 = c_2$

Todos los elementos se calculan con la nemotecnia

$$\text{Salto} - (\text{Referente})(\text{Sombra})$$

$$b_1 = a_{n-2} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-3} \quad ; \quad b_2 = a_{n-4} - \left(\frac{a_n}{a_{n-1}}\right) a_{n-5}$$

$$c_1 = a_{n-3} - \left(\frac{a_{n-1}}{b_1}\right) b_2 \quad ; \quad \text{etc.}$$

"El sistema es estable si todos los elementos de la columna de Routh tienen el mismo signo"

Nota: El criterio falla cuando aparecen ceros en la columna y cuando se repiten las raíces del polinomio.

Ejemplo: Comprobar que $D(s) = s^4 + 3s^3 + 2s^2 - 2s - 4$ es inestable